



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### Etapa Locală- 2024

#### clasa a VIII-a

#### Subiectul 1

- a) Se consideră numerele reale  $x, y$ , astfel încât  $(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 9$  și numărul  $a = 3x + 6y$ .  
Demonstrați că  $a \in [-8, 22]$ .
- b) Determinați numărul natural  $n$  pentru care numărul  $a = n^4 + 4$  este prim.

#### Subiectul 2

Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ . Punctele  $M, N, P$  și  $Q$  sunt mijloacele segmentelor  $AB, CC', A'D'$ , respectiv  $BC$ .

- a) Demonstrați că unghiul dintre dreapta  $PM$  și planul  $(ABC)$  este congruent cu unghiul dintre dreapta  $PN$  și planul  $(BCC')$ .
- b) Arătați că punctele  $M, N, P$  și  $Q$  sunt coplanare.

#### Subiectul 3

- a) Arătați că, pentru orice numere reale pozitive  $x$  și  $y$ , are loc inegalitatea:  $\frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .
- b) Arătați că, pentru orice numere reale pozitive  $a, b$  și  $c$ , are loc inegalitatea:
- $$3 + 2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

*Problema E16686, Gazeta Matematică nr. 9/2023*

#### Subiectul 4

Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  și un punct  $V$  care nu aparține planului  $(ABC)$ , astfel încât unghiurile  $VAB, VBC$  și  $VCA$  sunt congruente. Știind că punctul  $O$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , demonstrați că dreapta  $VO$  este perpendiculară pe planul  $(ABC)$ .

#### Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore